आगमन विधि की ख़ामियाँ

उदाहरण से पढ़ाने के ख़तरे

अरुण नाइक

रचनात्मक शिक्षण विद्यार्थियों को पैटर्न पहचानने और उचित सिद्धान्त (जिसका आधार अनुमान लगाने में है) के निर्माण के लिए प्रेरित करता है। इस विधि में क्या ख़तरे हैं? कोई दावा महज़ इसलिए सत्य है क्योंकि विचार किए गए सभी उदाहरणों में उसे सत्य पाया गया है, इस धारणा को विद्यार्थियों तक पहुँचाने से बचने के लिए शिक्षक को कौन-सी सावधानियाँ बरतनी चाहिए?

शिक्षक शिक्षा पाठ्यचर्या (बीएड) के 'गणित-शिक्षण की विधियाँ' में आगमन (Induction) और निगमन (Deduction) विधियों पर ज़ोर दिया जाता है। एक शिक्षक-अध्यापक के रूप में अपने कार्यकाल के दौरान मैंने आगमन विधि को उत्साहपूर्वक पढ़ाया और विद्यार्थी शिक्षकों द्वारा पढ़ाए जाने वाले गणित के कई पाठों का अवलोकन भी किया। हमारे विद्यार्थी शिक्षक जब भी सामान्यीकरण की बात करते, तो आगमन विधि का प्रयोग करते। कुछ मौक़ों पर यह सूत्र-निर्माण का भी रूप ले लेता।

गणित-शिक्षण में 'आगमन सोच' का प्रयोग कैसे किया जाता है? सामान्यत: शिक्षक कुछ विशेष उदाहरण एक-एक करके बताते हैं। फिर वह विद्यार्थियों को पैटर्न का अवलोकन करने व उसे नोट करने और फिर उस पैटर्न को अज्ञात स्थितियों तक बढ़ाने को कहते हैं। और इस तरह वह सामान्यीकरण का रूप ले लेता है। उदाहरण के लिए अगर शिक्षक घातांक के नियम पढ़ा रहे हैं, तो वे निम्नलिखित (या इसी तरह के) उदाहरणों का उल्लेख करेंगे, बार-बार प्रश्न पूछेंगे, विद्यार्थियों से जवाब प्राप्त करेंगे, ब्लैकबोर्ड पर जवाबों की व्यवस्थित रूप से तुलना करेंगे और फिर किसी नियम पर पहुँचेंगे।

$2^3 \times 2^4$	2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2	2^7	2^{3+4}
$3^4 \times 3^5$	3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3	3^9	3^{4+5}
$0.5^3 \times 0.5^2$	0.5 x 0.5 x 0.5 x 0.5 x 0.5	0.5^5	0.5^{3+2}
$a^4 \times a^2$	a x a x a x a x a x a	a^6	a^{4+2}
$y^5 \times y^2$		y^7	
$b^m \times b^n$			

यही इस विधि का सार है। पहली नज़र में, गणित में सामान्यीकरण की पड़ताल करने में बच्चों की मदद करने का यह एक बहुत बढ़िया तरीक़ा मालूम होता है। कुछ विशिष्ट उदाहरणों के ज़रिए काम करके और शिक्षक द्वारा नियम को समझाए बिना ही विद्यार्थी सामान्यीकरण करने लगते हैं। विद्यार्थी स्वयं से ही नियम पता कर लेते हैं।

एक शिक्षक-अध्यापक के रूप में कार्य करते हुए मेरा ध्यान हमेशा केवल दो बातों पर रहा। एक, शिक्षक द्वारा विद्यार्थियों को छानबीन करने के लिए दिए गए उदाहरणों की विविधता पर। और दूसरा, विद्यार्थियों द्वारा पैटर्न पहचानने, परिकल्पना करने और व्यवस्थित ढंग से सवाल करके सामान्यीकरण करने के लिए शिक्षक द्वारा बनाई गई जगह पर। विद्यार्थियों को परिकल्पना करते देख मुझे बहुत अच्छा लगा और मैं सुखपूर्वक इस विधि की सीमाओं से अनजान रहा।

कुछ वर्ष पहले, जब मैंने इस विधि के बारे में सोचना शुरू किया तो मेरे मन में कुछ शंकाएँ आईं। क्या यह वास्तव में विद्यार्थी द्वारा की गई खोज है? क्या सामान्यीकरण पर पहुँचने के बाद किसी प्रमाण की ज़रूरत नहीं है? क्या सामान्यीकरण ही प्रमाण है? यह लेख इस विषय पर मेरे विचारों को एक साथ लाता है।

‘आगमन सोच’ क्या है?

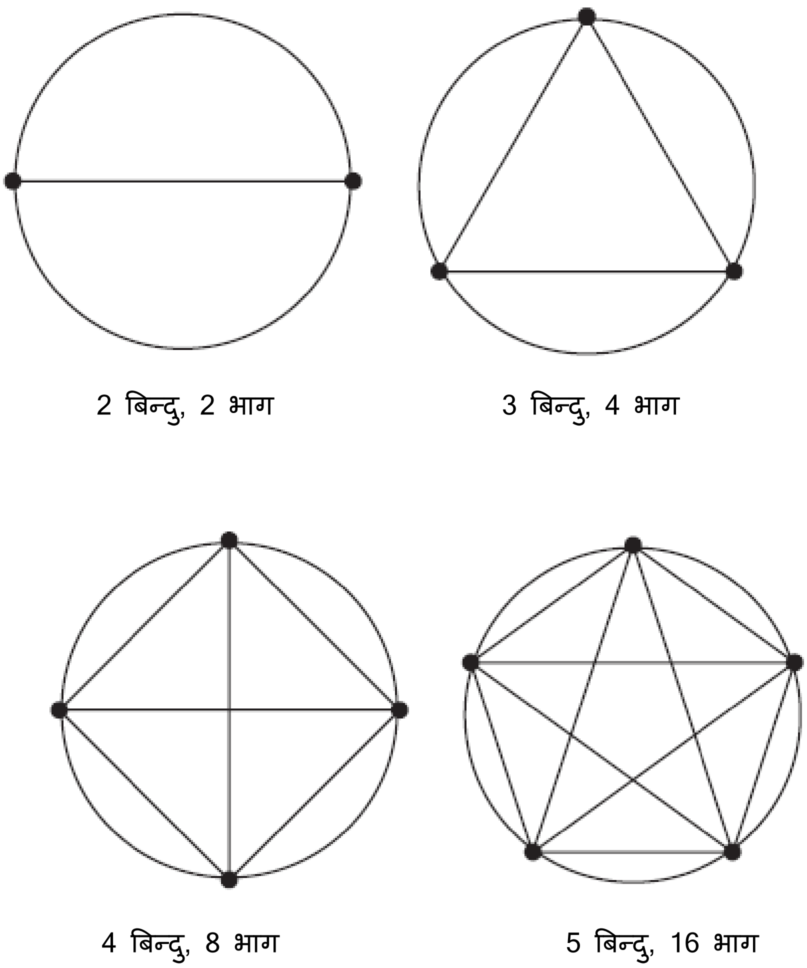
‘आगमन सोच’ वह है जो हम अपने दैनिक जीवन में इसे जाने-समझे बिना या इस तरह नाम दिए बिना नियमित रूप से करते हैं। हम किसी देश X के चार व्यक्तियों से मुलाक़ात करते हैं जिन्हें मसालेदार भोजन पसन्द है और इस आधार पर हमारा निष्कर्ष होता है, “देश X के सभी लोगों को मसालेदार भोजन पसन्द है।” या हम किसी देश Z के पाँच लोगों से मुलाक़ात करते हैं जिन्हें नाचना पसन्द है और इस आधार पर हम निष्कर्ष निकालते हैं, “देश Z के सभी लोगों को नाचना पसन्द है।” साधारणत: हम कुछ विशेष मामलों की जाँच-परख करते हैं और अपने अवलोकनों के आधार पर ‘सामान्यीकरण’ पर पहुँचते हैं। अगर कोई विधि बारम्बार कारगर

होती है तो हम यक़ीन कर लेते हैं कि यह विधि हमेशा कारगर है। जैसे-जैसे पुष्टि के उदाहरण बढ़ते जाते हैं, वैसे-वैसे हमारा निष्कर्ष मज़बूत होता जाता है।

हालाँकि सामान्यीकरण करने की क्षमता मानव मस्तिष्क की एक अन्तर्निहित और महत्त्वपूर्ण क्षमता है और हम जो कुछ भी करते हैं यह क्षमता उसे मज़बूत बनाती है (वास्तव में तमाम वैज्ञानिक उद्यम के मूल में यह यही सोच है), फिर भी इसके परिणामों की समीक्षा किए बिना उन्हें स्वीकारना सम्भावित रूप से हानिकारक हो सकता है। और यह बात सभी क्षेत्रों के लिए समान रूप से सच है, चाहे गणित हो या विज्ञान हो या सम्पूर्ण जीवन हो। यहाँ दो उदाहरण प्रस्तुत हैं जो गणित के लिए इस टिप्पणी की प्रासंगिकता दर्शाते हैं।

एक वृत्त का क्षेत्रों में विभाजन

n बिन्दुओं वाले एक वृत्त पर विचार करें। यदि बिन्दुओं की प्रत्येक जोड़ी एक जीवा से जुड़ी हुई हो तो वृत्त कितने भागों में विभाजित होगा? (यह मानकर चलें कि कोई भी दो जीवा एक-दूसरे के समान्तर नहीं हैं और कोई भी तीन जीवाएँ एक बिन्दु पर नहीं मिलती हैं।)



चित्र-1 कभी-कभी कोई अनुक्रम हमें भ्रमित कर सकता है...

इन उदाहरणों (चित्र-1) को देखकर हम में से अधिकांश लोग इस बात पर यक़ीन कर लेंगे कि ऐसे 6 बिन्दु होने पर वृत्त 32 भागों में विभाजित होगा। तो हमारा अनुमान है कि जब *n* बिन्दु आपस में जुड़ते हैं तो वृत्त 2^{n-1} भागों में विभाजित होता है, *पर यह सिर्फ़ अनुमान ही है*। हमने कुछ उदाहरण देखे, कुछ विशिष्ट मामलों में इसे सत्य पाया और यह मान लिया कि सभी अपरीक्षित मामलों के लिए भी यह सत्य है। यह समझाने के लिए कि हम ऐसा क्यों मानते हैं हमारे पास इसके अलावा और कोई तर्क नहीं है कि यह उन मामलों के लिए सत्य था जिन्हें हमने जाँचा था। *हम सोच सकते हैं कि हमने कुछ स्थापित कर दिया है, पर ऐसा नहीं है।*

इस अनुमान की जाँच करने के लिए हमें सभी सम्भावित मामलों की जाँच करनी होगी। उपरोक्त उदाहरण में अगर हम 6 बिन्दुओं को जोड़कर देखें, तो पाएँगे कि वृत्त 32 भागों में विभाजित नहीं होता है। यह दर्शाता है कि हमारा अनुमान ग़लत है।

एक अभाज्य संख्या जेनरेटर

यहाँ दूसरा उदाहरण प्रस्तुत है। कोई व्यक्ति यह अनुमान लगा सकता है कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $n^2 - n + 41$ अभाज्य है और इसका प्रमाण भी यक़ीन करने लायक है :

- यदि $n = 1$ तब $n^2 - n + 41 = 41$ अभाज्य है।
- यदि $n = 2$ तब $n^2 - n + 41 = 43$ अभाज्य है।
- यदि $n = 3$ तब $n^2 - n + 41 = 47$ अभाज्य है।

यहाँ तक कि $n = 40$ तक यह प्रक्रिया करने पर भी ऐसा कोई प्रमाण नहीं मिलता कि यह अनुमान ग़लत है। पर यह आसानी से देखा जा सकता है कि यह कथन सामान्य रूप से सही नहीं हो सकता क्योंकि $n = 41$ के लिए व्यंजक का मान 41^2 हो जाता है, जो अभाज्य नहीं है। इस प्रकार पैटर्न के विपरीत उदाहरण ज्ञात कर हमने इस अनुमान को ग़लत साबित कर दिया।

एक प्रत्युदाहरण (Counterexample) की धारणा

आगमनिक तर्क सांकेतिक (suggestive) होते हैं और प्रमाण निष्कर्ष का समर्थन करते प्रतीत होते हैं, पर उस निष्कर्ष की सटीकता की कोई गारंटी नहीं होती है। स्पष्ट है कि यदि गणित में आप किसी कथन को सिद्ध करना चाहते हैं तो केवल प्रयोग करना और अवलोकन करना काफ़ी नहीं है, क्योंकि किसी भी अनुमान को केवल उदाहरणों से सिद्ध नहीं किया जा सकता है। वहीं दूसरी ओर ऐसे किसी एक उदाहरण को खोजकर जो अनुमान के पैटर्न के मुताबिक़ न हो आप उस अनुमान को *ग़लत* साबित कर सकते हैं। *किसी अनुमान को ग़लत साबित करने के लिए ऐसा एक ही उदाहरण काफ़ी है*। ऐसा उदाहरण जो अनुमान के 'विपरीत' हो, उसे

प्रत्युदाहरण कहते हैं। अभाज्य संख्या जेनरेटर अनुमान में $n = 41$ एक प्रत्युदाहरण है। (पाठक इस अनुमान से सम्बन्धित ऐसे और भी प्रत्युदाहरण ज्ञात करने का आनन्द ले सकते हैं।)

परन्तु, जब कथन सत्य हो तब क्या?

क्या होगा अगर कोई कथन वास्तव में सत्य हो और हम उसके लिए प्रमाण खोज रहे हों? हम जानते हैं कि किसी कथन को सही साबित करने के लिए केवल उदाहरण अपर्याप्त है। हम यह भी जानते हैं कि कथन को ग़लत साबित करने के लिए एक प्रत्युदाहरण ही काफ़ी है। लेकिन यदि वह कथन सत्य है तो आपको उसके लिए कोई प्रत्युदाहरण कतई नहीं मिलेगा।

उदाहरण के लिए इस दावे को देखें;

सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ दावे के लिए हमें पक्के तौर पर कोई प्रत्युदाहरण नहीं मिलेगा क्योंकि यह दावा सत्य है।

इस परिघटना का और भी प्रबल उदाहरण फर्मा (Fermat, 1601-1665) के दावे द्वारा प्रस्तुत होता है : यदि $n, 2$ से बड़ा पूर्णांक है तो समीकरण $x^n + y^n = z^n$ का कोई भी हल धनात्मक पूर्णांक नहीं होता है। इसका प्रत्युदाहरण ढूँढ़ने से कोई फ़ायदा नहीं होगा क्योंकि (जैसा कि अब हम जानते हैं) यह कथन सत्य है।

इस प्रकार किसी अनुमान के बारे में तय करने की विधि के रूप में कुछ उदाहरणों के साथ प्रयोग करना हमेशा कारगर नहीं होता है। तो फिर हम आगे कैसे बढ़ें? क्या कोई रास्ता है? ऐसे में *निगमनिक प्रमाण* (deductive proof) की आवश्यकता होती है, और एक प्रबल निगमनिक प्रमाण *गणितीय आगमन* होता है।

गणितीय आगमन द्वारा प्रमाण

गणित अपनी संरचना और आन्तरिक संगतता (consistency) के मामले में दूसरे विषयों से अलग है। इसका आधार अभिगृहीत (Axioms) और अभिधारणाएँ (Postulates) हैं जो स्वयंसिद्ध सत्य हैं और जिन्हें बिना किसी प्रमाण के सत्य मान लिया जाता है। गणित के सारे प्रमेय (Theorems), सिद्धान्त और सामान्यीकरण इन्हीं के आधार पर व्युत्पन्न और सिद्ध किए जाते हैं। गणितीय आगमन द्वारा किसी प्रमाण का बड़े स्तर पर निर्माण सरल है :

- प्रमेय को आधारभूत मामले, मान लीजिए कि $n = 1$, के लिए सिद्ध करें।
- सिद्ध करें कि यदि इस प्रमेय को n के किसी भी मान के लिए सत्य माना जाता है तो इसे n के अगले उच्च मान के लिए भी सत्य होना चाहिए। यह चरण काफ़ी निर्णायक है; इसे किसी भी स्वेच्छ (arbitrary) n के लिए काम करना चाहिए।

- चरण 1 और 2 में सम्बन्ध स्थापित करें : यह निगमन करें कि चूँकि प्रमेय ज्ञात मामले (मान लीजिए कि $n = 1$) के लिए सत्य है इसलिए यह अगले मामले ($n = 2$) के लिए भी सत्य होगा, और इसके अगले मामले ($n = 3$) के लिए भी। और इस प्रकार यह सभी धनात्मक पूर्णांकों n के लिए सत्य होगा।

अपने नाम 'गणितीय आगमन' के बावजूद यह एक प्रकार का निगमन ही है। आगमन के साथ इसकी समानता है क्योंकि यह एक छोटे-से प्रतिदर्श (sample) के आधार पर अनन्त मामलों के लिए सामान्यीकरण करती है। और, क्रमागत अपरीक्षित मामलों के बीच तार्किक सम्बन्धों के कारण इसे निष्पादित करना सम्भव है।

किसी कथन को सिद्ध करने के लिए जिन पद्धतियों का उपयोग किया जा सकता है, आगमन उनमें से एक है। ऐसा कथन मिलना दुर्लभ होगा जिसके लिए वैकल्पिक प्रमाण सम्भव न हो। उदाहरण के लिए सर्वसमिका $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ पर विचार करें। सर्वसमिका $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$ के आधार पर इसका एक सरल आगमनिक प्रमाण है और परिणामस्वरूप यह एक शानदार 'बिना शब्दों के प्रमाण' में तब्दील हो जाता है।

पर इसे इन पदों के क्रम को उल्टा करके भी सिद्ध किया जा सकता है :

$$\begin{Bmatrix} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 3) + (2n - 1) \\ (2n - 1) + (2n - 3) + (2n - 5) + \cdots + 3 + 1 \end{Bmatrix}$$

और पदों को 'स्तम्भवार' जोड़कर भी। प्रत्येक स्तम्भ में संख्याओं के जोड़े का योगफल 2n है, तो इस प्रकार दोनों पंक्तियों का योगफल $n \times 2n = 2n^2$ होगा । अत: प्रत्येक पंक्ति का योगफल n^2 है। ध्यान रहे कि यह प्रमाण आगमन के सिद्धान्त पर आधारित *नहीं* है।

आगमनिक और ग़ैर-आगमनिक– (non-inductive) प्रमाणों के ऐसे कुछ और जोड़ों को संकलित करना एक सूचनाप्रद कार्य है।

निष्कर्ष

आगमनिक विवेचन (reasoning) में अवलोकित डेटा के आधार पर सामान्य पैटर्न का अनुमान लगाना शामिल होता है। विज्ञान में (या सम्पूर्ण जीवन में), ऐसे अनुमान केवल अनुमान ही रह जाते हैं, जिनकी शुद्धता की सम्भावना की डिग्री बदलते रहती है। हालाँकि, गणित में कुछ अनुमान 'गणितीय आगमन' जैसी तकनीक से सिद्ध किए जा सकते हैं। इस तकनीक में 'आगमन' से आशय इस शब्द की सामान्य समझ से नहीं है, बल्कि यह उन अनुमानों को सिद्ध करने की विधि है जो आगमन या किसी अन्य विधि से प्राप्त हुए हैं।

Resources

i. Titu Andreescu and Razvan Gelca. Putnam and Beyond, Springer publications, 2007

ii. http://www.earlham.edu/~peters/courses/logsys/math-ind.htm

iii. Shmuel Avital and Rodney T. Hansen, Mathematical induction in the classroom,1976

iv. http://tellerprimer.ucdavis.edu/pdf/2ch11.pdf

v. http://www.math.uconn.edu/~hurley/math315/proofgoldberger.pdf

vi. http://www.richland.edu/james/lecture/m116/sequences/induction.html

---

अरुण नाइक अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के संसाधन केन्द्र की अकादमिक और शिक्षण टीम का नेतृत्व करते हैं। वे शिक्षक और शिक्षक-अध्यापकों के साथ कई वर्षों से कार्य कर रहे हैं। उनसे arun@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कुमार गन्धर्व मिश्र
पुनरीक्षण एवं कॉपी एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही